ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2014. Том 14. № 1 (51).*

УДК 517.938

К АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ В ПРОСТОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Б.К. Абенов, С.А. Айсагалиев, М.Н. Калимолдаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби
050040, Алматы, пр. аль-Фараби, 71, e-mail: babenov@mail.ru,
serikbai.aisagaliev@kaznu.kz
Институт проблем информатики и управления МОН РК
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: mnk@ipik.kz

Получено новое эффективное условие абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных регулируемых систем в простом критическом случае путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Предлагаемый метод исследования абсолютной устойчивости позволяет получить область абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы шире, нежели известные методы. Эффективность предлагаемого метода показана на примере.
Ключевые слова: *абсолютная устойчивость, регулируемая система, условие абсолютной устойчивости, оценка несобственных интегралов, невырожденное преобразование.*

Введение

Исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем в основном и критическом случаях посвящено много работ. Среди них следует

Keywords: *absolute stability, regulative system, absolute stability condition, improper integrals evaluation, nondegenerate transformation.*
2010 Mathematics Subject Classification: 34C05, 34C07, 34C25
© Б.К. Абенов, С.А. Айсагалиев, М.Н. Калимолдаев, 2014.

отметить монографии [1–6]. Существуют два подхода к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем: метод А.И. Лурье [2], метод В.М. Попова [3]. Связь между этими методами установлена в работах В.А.Якубовича и его учеников [4]. Разрешающие уравнения А.И. Лурье были получены на основе второго метода Ляпунова путем выбора функций Ляпунова в виде "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейностей". В конечном счете метод А.И. Лурье сводится к разрешимости матричных неравенств. Естественно, для решения прикладных задач такой подход довольно сложный. Продолжателем идей А.И. Лурье в направлении поиска наибольшего коэффициента усиления линейной части системы был А.К.Бедельбаев [5], а качество переходных процессов в регулируемых системах было исследовано в работе Б.М. Майгарина [6].

Частотное условие абсолютной устойчивости В.М.Попова является необходимым и достаточным условием разрешимости матричных неравенств А.Н. Лурье, и, более того, для одномерных систем частотные условия допускают геометрическую интерпретацию, что позволяет проверить разрешимость матричных неравенств при фиксированных значениях конструктивных параметров системы. Однако для многомерных систем частотные условия не имеют геометрическую интерпретацию, как в случае одномерных систем, и их проверка в этих случаях является довольно сложной задачей. Сложность проверки частотных условий, необходимость выделения области абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы привели к созданию алгебраических условий абсолютной устойчивости путем сведения частотных условий к проверке положительности полиномов на положительной полуоси [7, 8].

В 1949 году М.А. Айзерман сформулировал следующую проблему [9]: пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu\sigma$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, $\sigma = Sx$, асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$, с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1) \bigm| 0 \leq \varphi(\sigma)\sigma \leq \mu_0\sigma^2, \forall\, \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом?

Проблема Айзермана была решена для систем второго порядка И.Г. Малкиным, Н.П. Еругиным, Н.Н. Красовским.

В 1957 году Р.Е. Калманом сформулирована следующая проблема [10]: пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu\sigma$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$,

$\sigma = Sx$, асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$, с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi_2 = \{\varphi(\sigma) \in C^1(R^1, R^1) \mid 0 \leq \dfrac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \leq \mu_0, \forall\, \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом?

Проблема Калмана имеет положительное решение при $n = 2$. Остаются открытыми решения проблемы Айзермана и проблемы Калмана для случая $n > 2$.

В работе [11] предложен новый подход к решению указанных проблем в виде вычислительных алгоритмов на основе модифицированного метода гармонической линеаризации.

В работах [12–15] приведены результаты новых исследований абсолютной устойчивости регулируемых систем на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Данная работа является продолжением этих исследований. С целью показать эффективность предлагаемого метода в виде примера приведена система третьего порядка, для который проблема Айзермана имеет положительное решение.

1. Постановка задачи

Уравнение движения регулируемых систем в простом критическом случае имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \dot{\eta} = \varphi(\sigma), \quad \sigma = Dx + E\eta, \\ &x(0) = x_0, \quad \eta(0) = \eta_0, \quad t \in I = [0, \infty), \end{aligned} \tag{1}$$

где A, B, D, E — постоянные матрицы порядков $n\times n$, $n\times 1$, $1\times n$, 1×1 соответственно, матрица A — гурвицева, то есть $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1, n}$, $\lambda_j(A)$ — собственные значения матрицы A,

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \big\{\varphi(\sigma) \in C(R^1,\ R^1) \,\big|\, \varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \bar{\varphi}(\sigma),\ 0 \leq \bar{\varphi}(\sigma)\sigma < \mu_0\sigma^2, \\ \sigma \neq 0,\ \forall\, \sigma \in R^1,\ \bar{\varphi}(0) = 0,\ |\bar{\varphi}(\sigma)| \leq \bar{\varphi}_*,\ 0 < \bar{\varphi}_* < \infty\big\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\varepsilon{>}0$ — сколь угодно малое число. Заметим, что

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1 = \big\{\bar{\varphi}(\sigma) \in C(R^1,\ R^1) \,\big|\, 0 \leq \bar{\varphi}(\sigma)\sigma < \mu_0\sigma^2,\ \sigma \neq 0,\ \forall\, \sigma \in R^1, \\ \bar{\varphi}(0) = 0,\ \big|\bar{\varphi}(\bar{\sigma})\big| \leq \bar{\varphi}_*,\ 0 \leq \bar{\varphi}_* < \infty\big\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами, для таких систем функция $\varphi(\sigma)$удовлетворяет условиям (2), (3).

Поскольку $0 < \varphi_* < \infty,\ \varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, то включения (2), (3) содержат все нелинейности из сектора $[0, \mu_0]$.

Положения равновесия системы (1), (2) определяются из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\varphi(\sigma_*) = 0$, $\sigma_* = Dx_* + E\eta_*$.

Так как матрица A — гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ обращается в нуль только при $\sigma = 0$ в случае, когда система (1), (2) имеет единственное положение равновесия $(x_* = 0,\ \eta_* = 0)$, где $\sigma_* = 0$.

Полагаем, что в достаточно малой окрестности точки $\sigma = 0$, функцию $\varphi(\sigma)$ можно аппроксимировать линейной функцией $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$. Иными словами, при $|\sigma| < \delta$, где $\delta > 0$ — достаточно малое число, $\varphi(\sigma) = \mu\sigma,\ \varepsilon \leq \mu,\ \varepsilon > 0$. Тогда тривиальное решение системы (1), (2), равное $x_* = 0,\ \eta_* = 0$, асимптотически устойчиво в малом, если матрица

$$A_1(\mu) = \begin{pmatrix} A + B\mu D & B\mu E \\ \mu D & \mu E \end{pmatrix},\ 0 < \varepsilon \leq \mu < \bar{\mu}_0,\ \bar{\mu}_0 \geq \mu_0\,,$$

гурвицева.

Определение 1. *Положение равновесия $x_* = 0$, $\eta_* = 0$ системы (1), (2) называется абсолютно устойчивым, если матрицы A, $A_1(\mu)$, $0 < \varepsilon \leq \mu$, — гурвицевы и для всех $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ решение дифференциального уравнения (1) обладает свойством: $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; 0, x_0, \eta_0, \varphi) = x_* = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t; 0, x_0, \eta_0, \varphi) = \eta_* = 0$ для любых x_0, η_0, $|x_0| < \infty,\ |\eta_0| < \infty$.*

Заметим, что

1) исследуются свойства решений системы с дифференциальным включением

$$\dot{x} \in Ax + B\varphi(\sigma),\ \dot{\eta} \in \varphi(\sigma),\ \sigma = Dx + E\eta,\ t \in [0, \infty)\,;$$

2) поскольку $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, то уравнение (1) имеет неединственное решение, исходящее из начальной точки $x(0) = x_0,\ \eta(0) = \eta_0$;

3) из определения абсолютной устойчивости следует, что все решения системы, исходящие из любой начальной точки $(x_0,\, \eta_0),\ |x_0| < \infty$, $|\eta_0| < \infty$, стремятся к положению равновесия $x_* = 0,\ \eta_* = 0$ при $t \to \infty$.

Определение 2. *Условием абсолютной устойчивости системы* (1), (2) *называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы* (A, B, D, E, μ_0), *при выполнении которых положение равновесия* ($x_* = 0,\ \eta_* = 0$) *абсолютно устойчиво.*

Ставится задача: найти новое эффективное условие абсолютной устойчивости положения равновесия $x_* = 0,\ \eta_* = 0$ системы (1), (2), которое позволяет в пространстве конструктивных параметров системы выделить область шире, чем известные критерии.

Отметим что

1) постановка задачи абсолютной устойчивости решений уравнений с дифференциальным включением отличается от постановки задачи на устойчивость по Ляпунову;

2) целесообразно для исследования абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2) разработать совершенно новый метод, отличный от второго метода Ляпунова.

Ниже приведен совершенно новый подход к исследования абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

2. Неособое преобразование

Как следует из включений (2), (3), уравнения движения (1) могут быть представлены в виде

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 \bar{\varphi}(\sigma),\ \ \sigma = S\,z,\ \ z(0) = z_0,\ \ t \in I = [0, \infty), \tag{4}$$

где

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix},\ A_1 = A_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A + B\varepsilon D & B\varepsilon E \\ \varepsilon D & \varepsilon E \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} B \\ 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix},$$

$\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$, матрица $A_1 = A_1(\varepsilon)$ порядка $(n+1) \times (n+1)$ — гурвицева.

Характеристический полином матрицы A_1 равен

$$\Delta(\lambda) = |\lambda\, I_{n+1} - A_1| = \lambda^{\,n+1} + a_n\,\lambda^{\,n} + a_{n-1}\,\lambda^{\,n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0,$$

где I_{n+1} — единичная матрица порядка $(n+1)\times(n+1)$, $a_i = a_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$. Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли, $\Delta(A_1) = 0$. Тогда

$$A_1^{n+1} = -a_n\, A^n - a_{n-1} A^{n-1} - \ldots - a_1\, A_1 - a_0\, I_{n+1}\ .$$

Лемма 1. *Пусть вектор-строка* $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1}) \in R^{n+1}$ *такая, что*

$$\theta B_1 = 0, \quad \theta A_1 B_1 = 0, \quad \ldots, \quad \theta A_1^{n-1} B_1 = 0, \quad \theta A_1^n B \neq 0. \tag{5}$$

Тогда уравнение (4) *может быть представлено в виде*

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = y_2, \ \dot{y}_2 = y_3, \ \ldots, \ \dot{y}_n = y_{n+1}, \\ &\dot{y}_{n+1} = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - a_n \ y_{n+1} + \theta \ A_1^n \ B_1 \bar{\varphi}(\sigma), \end{aligned} \tag{6}$$

где $y_1 = \theta z, \ y_2 = \theta A_1 z, \ \ldots, \ y_{n+1} = \theta A_1^n z, \ z = z(t), \ y_i = y_i(t), \ i = \overline{1, n+1}.$

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение из (4). Умножая слева на θ, имеем

$$\theta \dot{z} = \theta A_1 z + \theta B_1 \bar{\varphi}(\sigma) = \theta A_1 z, \quad \theta z(0) = \theta z_0, \quad t \in I, \tag{7}$$

в силу равенства $\theta B_1 = 0$, где $\theta z = y_1, \ \theta A_1 z = y_2$. Следовательно, $\dot{y}(t) = y_2(t), \ t \in I$.

Дифференцируя по t тождество (7), получим

$$\dot{y}_2 = \theta \ddot{z} = \theta A_1 \dot{z} = \theta A_1 [A_1 z + B_1 \bar{\varphi}(\sigma)] = \theta A_1^2 z = y_3, \quad y_2(0) = \theta A_1 z_0, \ t \in I,$$

где $\theta A_1 B_1 = 0$. Аналогично получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 = \theta \dddot{z} = \theta A_1^2 \dot{z} = \theta A_1^3 z = y_4, \quad y_3(0) = \theta A_1^2 z_0, \ldots, \\ \dot{y}_n = y_{n+1}, \quad \dot{y}_{n+1} = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - \theta A_1^n B_1 \bar{\varphi}(\sigma), \end{aligned}$$

где $y_{n+1}(0) = \theta A_1^n z_0$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$R = (\theta^*, \ A_1^* \theta^*, \ \ldots \ , A_1^{*n} \theta^*) \tag{8}$$

порядка $(n+1) \times (n+1)$ *равен* $n+1$, *где* "$*$" *— знак транспонирования. Тогда*

1. существует вектор-строка $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in R^{n+1}$ *такая, что*

$$\sigma = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + \cdots + \beta_n y_{n+1}; \tag{9}$$

2. если $y_1 = \theta \, z = 0, y_2 = \theta \, \mathrm{A}_1 z = 0, \ldots, y_{n+1} = \theta \, \mathrm{A}_1^n z = 0,$ *то* $z = 0$.

Доказательство. Заметим, что ранг матрицы R равен $n+1$ тогда и только тогда, когда векторы θ^*, $\mathrm{A}_1^*\theta^*, \ldots, \mathrm{A}_1^{*n}\theta^*$ — линейно независимы. Поскольку векторы $\theta^*, \mathrm{A}_1^*\theta^*, \ldots, \mathrm{A}_1^{*n}\theta^*$ образуют базис в R^{n+1}, то вектор $S^* \in R^{n+1}$ может быть представлен однозначно в виде $S* = \beta_0\theta^* + \beta_1\mathrm{A}_1^*\theta^* + \cdots + \beta_n\mathrm{A}_1^{*n}\theta^*$. Тогда

$$\sigma = Sz = \beta_0\theta\, z + \beta_1\mathrm{A}_1^*\theta^* z + \cdots + \beta_n\mathrm{A}_1^{*n}\theta^* z = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + \cdots + \beta_n y_{n+1}.$$

Теперь второе уравнение из (4) запишется в виде (9).

С другой стороны, из (8) следует, что пара $(\theta^*, \mathrm{A}_1^*)$ управляема. Из управляемости пары $(\theta^*, \mathrm{A}_1^*)$ следует, что равенства $\theta\, z = 0$, $\theta\,\mathrm{A}_1 z = 0, \ldots, \theta\,\mathrm{A}_1^n z = 0$ влекут за собой $z = 0$. Следовательно, из $y_i = 0$, $i = \overline{1,\ n+1}$, следует $z = 0$. Лемма доказана. □

Из лемм 1, 2 следует, что если выполнены равенства (5) и ранг матрицы R равен $n+1$, то система (1) равносильна системе (6), (9). Более того, из $\lim\limits_{t\to\infty} y_i\,(t) = 0,\ i = \overline{1,\ n+1}$, следует $\lim\limits_{t\to\infty} z\,(t) = 0$.

Вводя обозначения

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_n \end{pmatrix},\quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \theta\,\mathrm{A}_1^n\mathrm{B}_1 \end{pmatrix},\quad \bar{S} = (\beta_0,\, \beta_1,\, \ldots,\, \beta_n),$$

уравнения движения (6), (9) представим в виде

$$\dot{y} = \bar{A}y + \bar{B}\bar{\varphi}\,(\sigma)\,,\ \ \sigma = \bar{S}\,y, \quad \bar{\varphi}\,(\sigma)\, \in \Phi_1. \tag{10}$$

3. Свойства решений

Можно показать, что решения системы (1), (2), а также (6), (9) ограничены. Эти свойства могут быть использованы при оценке несобственных интегралов.

Теорема 1. *Пусть матрица* $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_1\,(\varepsilon)$ — *гурвицева, то есть* $\operatorname{Re}\lambda_j(A_1) < 0$, $j = \overline{1,n}$, *функция* $\bar{\varphi}\,(\sigma) \in \Phi_1$ *и пусть, кроме того, выполнены равенства* (5) *и ранг матрицы* R *равен* $n+1$. *Тогда верны оценки*

$$|z\,(t)| \le c_0,\ \ |\dot{z}\,(t)| \le c_1\ \ \forall\, t \in I = [0, \infty)\,, \tag{11}$$

$$|y_i\,(t)| \le m_{i1},\ \ |\dot{y}_i\,(t)| \le m_{i2},\ \ i = \overline{1, n+1},\ \ t \in I, \tag{12}$$

$$|\sigma\,(t)| \le c_2,\ |\dot{\sigma}\,(t)| \le c_3,\ \forall\, t \in I, \tag{13}$$

где $0 < m_{i1}, m_{i2} = const < \infty,\ \ i = \overline{1,\ n+1},\ \ 0 < c_i = const < \infty,\ \ i = 0, 1, 2, 3.$

Кроме того, функции $z\,(t)\,, y_i\,(t)\,,\ i = \overline{1,\ n+1},\ \ \sigma(t),\ \ t \in I$, *равномерно непрерывны.*

Доказательство. Из включения $\bar{\varphi}\,(\sigma) \in \Phi_1$ следует, что $|\bar{\varphi}(\sigma(t))| \le \bar{\varphi}_*,\ 0 < \bar{\varphi}_* < \infty,\ \forall\, t \in I$. Так как матрица $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_1\,(\varepsilon)$ — гурвицева, то есть если $a = \max\limits_{1 \le j \le n+1} Re\,\lambda_j(A_1) < 0$, то $\left\|e^{\mathrm{A}_1 t}\right\| \le ce^{(a+\delta)t},\ \forall\, t \in I,\ \ c = c\,(\delta) > 0,\ \delta > 0$ — сколь угодно малое число.

Решение дифференциального уравнения (4) запишется так

$$z\,(t) = e^{A_1 t} z_0 + \int\limits_0^t e^{A_1 (t-\tau)} B_1 \bar{\varphi}\,(\sigma\,(\tau))\, d\tau,\ \ t \in I.$$

Тогда

$$|z(t)| \le \left\|e^{A_1 t}\right\| |z_0| + \int\limits_0^t \left\|e^{A_1 (t-\tau)}\right\| |B_1| |\bar{\varphi}(\sigma(\tau))| d\tau \le c|z_0| e^{(a+\delta)t} +$$

$$+ ce^{(a+\delta)t} |B_1| \bar{\varphi}_* \int\limits_0^t e^{(a+\delta)\tau} d\tau =$$

$$= c|z_0| e^{(a+\delta)t} + ce^{a+\delta t} |B_1| \bar{\varphi}_* \left(-\frac{1}{a+\delta} e^{-(a+\delta)t} + \frac{1}{a+\delta} \right) =$$

$$= c|z_0| e^{(a+\delta)t} + \frac{1}{a+\delta} c |B_1| \bar{\varphi}_* \left(-1 + e^{(a+\delta)t} \right) \le c_0,\ \ \forall\, t \in I,$$

где $e^{(a+\delta)t} \le 1\ \forall\, t \in I,\ \ a+\delta < 0$. Отсюда следует ограниченность решения (4). Следовательно, решение системы (1), (2) ограничено. Из (4) следует, что

$$|\dot{z}(t)| \le \|A_1\|\, |z(t)| + |B_1|\ |\bar{\varphi}(\sigma(t))| \le \|A_1\|\, c_0 + |B_1|\, \bar{\varphi}_* = c_1, \forall\, t \in I,$$

$$|\sigma(t)| \le \|S\|\ |z(t)| \le c_2,\ \ |\dot{\sigma}(t)| \le \|S\|\ |\dot{z}(t)| \le c_3,\ \ \forall\, t \in I.$$

Из ограниченности производных $\dot{z}(t), \dot{\sigma},\ t \in I$, следует равномерная непрерывность функций $z(t),\ \sigma(t)$ в I.

Так как $y_1(t) = \theta\, z(t)$, $y_2(t) = \theta\, A_1 z(t), \ldots, y_{n+1}(t) = \theta A_1^n z(t),\ t \in I$, то

$$|y_1(t)| \le |\theta|\, |z(t)| \le |\theta|\, c_0 = m_{11}, \quad |y_2(t)| \le |\theta|\, \|A_1\|\, |z(t)| \le = m_{21}, \ldots,$$

$$|y_{n+1}(t)| \le |\theta|\, \|A_1^n\|\, |z(t)| \le = m_{n+1,1},\ \forall\, t \in I.$$

Из (6) получаем $|\dot{y}_i(t)| \le |y_{i+1}(t)| \le m_{i2},\ i = \overline{1, n},\ \forall\, t \in I$,

$$|\dot{y}_{n+1}(t)| \le |a_0|\, |y_1(t)| + \ldots + |a_n|\, |y_{n+1}(t)| + \|\theta A_1^n B\|\, \bar{\varphi}_* \le m_{n+1,2}, \forall\, t \in I.$$

Из ограниченности производных $\dot{y}_i(t),\ i = \overline{1, n+1}$ следует равномерная непрерывность функций $y_i,\ i = \overline{1, n+1}$. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия лемм* $1, 2$, *величина* $\chi = \theta A_1^n B_1 \neq 0$. *Тогда вдоль решения системы* (10) *верны тождества*

$$\bar{\varphi}(\sigma(t)) = \chi^{-1}\omega(t) + \chi^{-1} a_0 y_1(t) + \ldots + \chi^{-1} a_n y_{n+1}(t),\ t \in I, \qquad (14)$$

$$\sigma(t) = \beta_0 y_1(t) + \beta_1 y_2(t) + \ldots + \beta_n y_{n+1}(t),\ t \in I, \qquad (15)$$

$$\dot{\sigma}(t) = \beta_0 y_2(t) + \beta_1 y_3(t) + \ldots + \beta_{n-1} y_{n+1}(t) + \beta_n \omega(t),\ t \in I, \qquad (16)$$

где $\omega = \omega(t) = \dot{y}_{n+1}(t),\ t \in I$.

Доказательство. Вдоль решения системы (10) (см.(6), (9)) верно равенство

$$\dot{y}_{n+1}(t) = \omega(t) = -a_0 y_1(t) - a_1 y_2(t) - \ldots - a_n y_{n+1}(t) + \chi \bar{\varphi}(\sigma(t)),\ t \in I,$$

где $\chi = \theta A_1^n B_1 \neq 0$. Отсюда следует тождество (14). Тождество (15) следует из (9). Так как $\dot{\sigma}(t) = \beta_0 \dot{y}_1(t) + \beta_1 \dot{y}_2(t) + \ldots + \beta_n \dot{y}_{n+1}(t),\ t \in I$, то справдливо тождество (16). □

Лемма 3. *Пусть выполнены условия лемм* $1, 2$, *матрица* A_1 *— гурвицева, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. *Тогда для любой постоянной матрицы* Q *порядка* $(n+2) \times (n+2)$ *квадратичная форма* $\xi^*(t) Q \xi(t)$, $\xi(t) = (\omega(t), y_1(t), \ldots, y_{n+1}(t))$ *представима в виде*

$$\xi^*(t)\, Q \xi(t) = q_0 \omega^2(t) + q_1 y_1^2(t) + \ldots + q_{n+1} y_{n+1}^2(t) + \frac{d}{dt}\Big(\xi^*(t)\, F \xi(t)\Big)$$
$$t \in I = [0, \infty), \qquad (17)$$

где F *— постоянная матрица порядка* $(n+1) \times (n+1)$.

Доказательство. Легко убедиться в том, что

$$\omega(t)y_1(t) \equiv \dot{y}_{n+1}(t)y_1(t) = \frac{d}{dt}\big(y_{n+1}y_1\big) - y_{n+1}\dot{y}_1 = \frac{d}{dt}\big(y_{n+1}y_1\big) -$$
$$- y_{n+1}y_2 = \frac{d}{dt}\big(y_{n+1}y_1 - y_ny_2 + y_{n-1}y_3\big) - y_{n-1}y_4 = \ldots ,$$

$$\omega(t)y_2(t) \equiv \dot{y}_{n+1}y_2 = \frac{d}{dt}\big(y_{n+1}y_2\big) - y_{n+1}y_3 =$$
$$= \frac{d}{dt}\big(y_{n+1}y_2 - y_ny_3 + y_{n-1}y_4\big) - y_{n-1}y_5 = \ldots ,$$
$$\omega(t)y_{n+1}(t) \equiv \dot{y}_{n+1}(t)\, y_{n+1}(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(y_{n+1}^2\big), \ldots , y_1(t)y_2(t) =$$
$$= y_1(t)\,\dot{y}_1(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(y_1^2\big),$$

$$y_1(t)y_3(t) \equiv y_1(t)\dot{y}_2(t) = \frac{d}{dt}\big(y_1y_2\big) - y_2^2, \ldots , y_1(t)y_{n+1}(t) = y_1(t)\,\dot{y}_n(t) =$$
$$= \frac{d}{dt}\big(y_1y_n\big) - y_2y_n = \ldots , \qquad y_2(t)\, y_3(t) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\big(y_2^2\big), \ldots .$$

В частности, при $n = 2$ имеем

$$\omega\, y_1 = \dot{y}_3y_1 = \frac{d}{dt}\big(y_1y_3\big) - y_2y_3 = \frac{d}{dt}\,\big(y_1y_3\big) - y_2\dot{y}_2 = \frac{d}{dt}\,\big(y_1y_3 - \frac{1}{2}y_2^2\big)\,,$$
$$\omega\, y_2 = \dot{y}_3\, y_2 = \frac{d}{dt}\,\big(y_2y_3\big) - y_3^2\,; \quad \omega\, y_3 = \dot{y}_3y_3 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_3^2\big)\,,$$
$$y_1y_2 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_1^2\big), \quad y_1y_3 = \frac{d}{dt}\,\big(y_1y_2\big) - y_2^2, \quad y_2y_3 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_2^2\big)\,.$$

При $n = 3$

$$\omega\, y_1 = \frac{d}{dt}\,\big(y_1y_4 - y_2y_3\big) + y_3^2\,, \quad W y_2 = \frac{d}{dt}\,\big(y_2y_4 - \frac{1}{2}\,y_3^2\big)\,,$$
$$\omega y_3 = \frac{d}{dt}\,\big(y_3y_4\big) - y_4^2\,, \quad \omega\, y_4 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_4^2\big)\,, \quad y_1y_2 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_1^2\big)\,,$$
$$y_1y_3 = \frac{d}{dt} \quad \big(y_1y_2\big) - y_2^2\,, \quad y_1y_4 = \frac{d}{dt}\,\big(y_1y_3 - \frac{1}{2}\,y_2^2\big),$$
$$y_2y_4 = \frac{d}{dt}\,\big(y_2y_3\big) - y_3^2\,,\ y_3y_4 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_3^2\big),\ y_2y_3 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\big(y_2^2\big).$$

Поскольку квадратичная форма $\xi^*(t)\,Q\,\xi(t)$ содержит слагаемые с постоянными коэффициентами — произведения компонентов вектора $\xi(t)$, то верно представление вида (17). Доказательство леммы в более общем виде довольно громоздко. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы* 3. *Тогда*

$$\int\limits_0^\infty \xi^*(t)\,Q\,\xi(t)\,dt = \int\limits_0^\infty [q_0\omega^2(t) + q_1 y_1^2(t) + \ldots + q_{n+1}y_{n+1}^2]\,dt + l_0, \tag{18}$$

$$l_0 = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}[y^*(t)Fy(t)]\,dt = y^*(\infty)Fy(\infty) - y^*(0)Fy(0), \quad |l_0| < \infty. \tag{19}$$

Доказательство. Интегрируя тождество (17) с учетом оценки (12), где $|y_i(0)| \le m_{i\,1}$, $|y_i(\infty)| \le m_{i\,1}$, $i = \overline{1, n+1}$, получим соотношения (18), (19). Лемма доказана. $\square$

Лемма 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *вектор-функция* $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_{n+1}(t))$, $t \in I = [0, \infty)$, *ограничена:* $|y(t)| \le a$, $t \in I$, *и непрерывно дифференцируема, причем* $|\dot y(t)| \le c$, $t \in I$, $0 < a < \infty$, $0 < c < \infty$;

2) *скалярная функция* $V(x)$ *положительна, непрерывна при любом* $x \in R^{n+1}, x \ne 0$ *и* $V(0) = 0$;

3) $\int\limits_0^\infty V(y(t))dt < \infty$.

Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Доказательство. Пусть выполнены условия 1)–3) леммы. Покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Предположим противное, то есть $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) \ne 0$. Тогда существует последовательность $\{t_k\} \subset [0, \infty)$ такая, что $|y(t)| \ge \varepsilon > 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Выберем $t_{k+1} - t_k \ge m > 0$. Поскольку $y(t)$, $t \in I$, непрерывно дифференцируема и $|\dot y(t)| < c$, $\forall\, t \in I$, то $|y(t) - y(t_k)| \le c\,|t - t_k|$, $t \in$

$[t_k - m/2, t_k + m/2]$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\int\limits_0^\infty V(y(t))dt \geq \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{t_k-m/2}^{t_k+m/2} V(y(t))dt,$$

где $|y(t)| = |y(t_k) + y(t) - y(t_k)| \geq |y(t_k)| - |y(t) - y(t_k)| \geq \varepsilon - c\dfrac{m}{2} = \varepsilon_0 > 0$. Поскольку $\int\limits_{t_k-m/2}^{t_k+m/2} V(y(t))dt \geq V_{\min}m$, $V_{\min} = \min\limits_{\varepsilon_0 \leq |x| \leq a} V(x)$, то $\int\limits_0^\infty V(y(t))dt = \infty$. Это противоречит третьему условию леммы. Лемма доказана. □

4. Несобственные интегралы

На основе тождеств (14)–(16), оценок (11)–(13) с учетом (17)–(19) могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (10).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия лемм* 1, 2, *матрицы* A, $A_1(\varepsilon)$ — *гурвицевы,* $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любой величины* τ *вдоль решения системы* (10) *несобственный интеграл сходится:*

$$\begin{gathered} I_1 = \int\limits_0^\infty \bar{\varphi}(\sigma(t))\tau\dot{\sigma}(t)dt = \int\limits_0^\infty \big(N_0\omega^2(t) + N_1 y_1^2(t) + \ldots + \\ + N_{n+1}y_{n+1}^2(t)\big)dt + l_1 = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \bar{\varphi}(\sigma)\tau d\tau = \bar{c}_1, \quad |\bar{c}_1| < \infty\,, \end{gathered} \tag{20}$$

$$l_1 = y^*(t)\,F_1\,y(t)\big|_0^\infty = y^*(\infty)\,F_1\,y(\infty) - y^*(0)F_1\,y(0)\,, \quad |l_1| < \infty, \tag{21}$$

где $N_i = N_i(\tau)$, $i = \overline{0, n+1}$, F_1 — *постоянная матрица порядка* $(n+1) \times (n+1)$

Доказательство. Имеем

$$\bar{\varphi}(\sigma(t))\tau\dot{\sigma}(t) = \chi^{-1}\big(\omega(t) + a_0 y_1(t) + \ldots + a_n y_{n+1}(t)\big)\tau\times$$

$$\times\big(\beta_0 y_2(t) + \ldots + \beta_{n-1} y_{n+1}(t) + \beta_n \omega(t)\big) = \xi^*(t) N \xi(t), \quad t \in I,$$

где $\xi(t) = \big(\omega(t), y_1(t), \ldots, y_{n+1}(t)\big)$. Тогда

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \xi^*(t) N \xi(t) dt = \int\limits_0^\infty \bar{\varphi}(\sigma(t))\tau\dot{\sigma}(t) dt = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \bar{\varphi}(\sigma)\tau d\tau = \bar{c}_1, \ \ |\bar{c}_1| < \infty,$$

в силу ограниченности $\sigma(t), \ \ t \in I$, где N — постоянная матрица порядка $(n+2)\times(n+2)$. Как следует из леммы 4 ($Q{=}N$), верно равенство

$$\xi^*(t) N \xi(t) = N_0 \omega^2(t) + N_1 y_1^2(t) + \ldots + N_{n+1} y_{n+1}^2(t) + \frac{d}{dt}\Big(y^*(t) F_1 y(t)\Big), \quad t \in I.$$

Теперь соотношения (20), (21) следуют из (18), (19), где $l_1 = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}\left[y^*(t) F_1 y(t)\right] dt = y^*(t) F_1 y(t)\big|_0^\infty, \ |l_1| < \infty$ в силу ограниченности $y(0)$, и $y(\infty)$. □

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, $\tau = 1$. *Тогда*

$$\int\limits_0^\infty \omega^2(t) dt = \int\limits_0^\infty \left(-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0} y_1^2(t) - \ldots - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0} y_{n+1}^2(t)\right) dt + \bar{c}_0\,, \tag{22}$$

$$\bar{c}_0 = \Sigma_0^{-1}\left(c_{11} - l_{11}\right), \ |\bar{c}_0| < \infty, \ |c_{11}| < \infty, \ |l_{11}| < \infty, \tag{23}$$

где $\varphi(\sigma(t))\dot{\sigma}(t) = \xi^*(t)\Sigma\xi(t) = \Sigma_0\omega^2(t) + \ldots + \Sigma_{n+1} y_{n+1}^2(t) + \dfrac{d}{dt}\big(y^*(t) F_0 y(t)\big)$,

$l_{11} = y^*(t) F_0 y(t)\big|_0^\infty, \ c_{11} = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \bar{\varphi}(\sigma) d\sigma, \ \Sigma_0 \neq 0.$

Доказательство. Как следует из теоремы 3, при $\tau = 1$

$$I_0 = \int\limits_0^\infty \bar\varphi(\sigma(t))\dot\sigma(t)dt = \int\limits_0^\infty \big(\Sigma_0\omega^2(t) + \Sigma_1 y_1^2(t) + ... + \Sigma_{n+1}y_{n+1}^2(t)\big)\,dt +$$
$$+\int\limits_0^\infty \frac{d}{dt}\big(y^*(t)F_0y(t)\big)dt = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \bar\varphi(\sigma)d\sigma = c_{11},\ |c_{11}| < \infty,$$

где $l_{11} = y^*(t)F_0y(t)\big|_0^\infty,\ |l_{11}| < \infty$. Отсюда при $\Sigma_0 \neq 0,\ \bar c_0 = \Sigma_0^{-1}\,(c_{11} - l_{11})$ получим равенства (22), (23). □

Теорема 4. *Пусть выполнены условия лемм* 1, 2, *матрицы* $A,\ A_1\,(\varepsilon)$ — *гурвицевы,* $\bar\varphi\,(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любой величины* $\tau_1 > 0$ *вдоль решения системы* (10)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_0^\infty \big(\bar\varphi(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \tau_1\mu_0^{-1}\varphi^2(\sigma(t))\big)dt = \\ &= \int\limits_0^\infty \big(M_0\omega^2(t) + M_1y_1^2(t) + \ldots + M_{n+1}y_{n+1}^2(t)\big)dt + l_2 \geq 0, \end{aligned} \tag{24}$$

$$l_2 = y^*(t)F_2y(t)\,|_0^\infty = y^*(\infty)F_2y(\infty) - y^*(0)F_2y(0),\ \ |l_2| < \infty, \tag{25}$$

где $M_i = M_i(\tau_1),\ \ \tau_1 > 0,\ \ \ i = \overline{0, n+1}$, F_2 — *постоянная матрица порядка* $(n+1)\times(n+1)$.

Доказательство. Из включения $\bar\varphi(\sigma) \in \Phi_1$ следует

$$\frac{\bar\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu_0, \quad \frac{\sigma}{\bar\varphi(\sigma)} > \mu_0^{-1}, \quad \forall\,\sigma \in R^1.$$

Тогда для любой величины $\tau_1 > 0$ верно неравенство $\bar\varphi(\sigma)\tau_1\sigma > \tau_1\mu_0^{-1}\bar\varphi^2(\sigma),\ \forall\,\sigma \in R^1$. Отсюда следует, что вдоль решения системы (10) выполняется неравенство

$$\bar\varphi(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \tau_1\mu_0^{-1}\bar\varphi^2(\sigma(t)) > 0,\ \sigma(t) \neq 0,\ \forall\,t \in I, \tag{26}$$

где

$$\bar{\varphi}(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \tau_1\mu_0^{-1}\bar{\varphi}^2(\sigma(t)) = (\omega + a_0y_1 + \ldots + a_ny_{n+1})\chi^{-1}\tau_1(\beta_0y_1 + \ldots + \\ +\beta_ny_{n+1}) - \chi^{-1}\tau_1\mu_0^{-1}\chi^{-1}(\omega + a_0y_1 + \ldots + a_ny_{n+1})^2 = \xi^*(t)M\xi(t),\ t \in I,$$

M — постоянная матрица порядка $(n+2)\times(n+2)$. Далее, применяя лемму 3 с $Q = M$, получим $\xi^*(t)M\xi(t) = M_0\omega^2(t) + M_1y_1^2(t) + \ldots + M_{n+1}y_{n+1}^2(t) + \dfrac{d}{dt}\big(y^*(t)F_2y(t)\big),\ t \in I$.

Теперь соотношения (24), (25) следуют из (18), (19), (26). □

Лемма 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 4, *величина* $\Sigma_0 \neq 0$. *Тогда*

$$I_2 = \int\limits_0^\infty \bigg(\big(M_1 - M_0\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}\big)y_1^2(t) + \ldots + \big(M_{n+1} - M_0\frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}\big)y_{n+1}^2(t)\bigg)\,dt + \\ + \bar{c}_2 > 0, \quad (27)$$

$$\bar{c}_2 = M_0\bar{c}_0 + l_2,\ |\bar{c}_2| < \infty. \quad (28)$$

Доказательство. Поскольку $\Sigma_0 \neq 0$, то верны равенства (22), (23). Так как

$$I_2 = \int\limits_0^\infty \bigg(M_0\big(-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}y_1^2 - \ldots - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}y_{n+1}^2\big) + M_1y_1^2 + \ldots + M_{n+1}y_{n+1}^2\bigg)\,dt + \\ +M_0\bar{c}_0 + l_2 > 0,$$

то верно неравенство (27). □

Теорема 5. *Пусть выполнены условия лемм* 1, 2, *матрицы* A, $A_1(\varepsilon)$ — *гурвицевы,* $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любых величин* $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_{n+1}$ *вдоль решения системы* (10)

$$\begin{aligned} I_3 &= \int\limits_0^\infty \big(\gamma_0\omega(t) + \gamma_1y_1(t) + \ldots + \gamma_{n+1}y_{n+1}(t)\big)^2 dt = \\ &= \int\limits_0^\infty \big(\Gamma_0\omega^2(t) + \Gamma_1y_1^2(t) + \ldots + \Gamma_{n+1}y_{n+1}^2(t)\big)dt + l_3 \geq 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$l_3 = y^*(t)F_3y(t)\Big|_0^\infty = y*(\infty)F_3y(\infty) - y^*(0)F_3y(0), \ |l_3| < \infty, \tag{30}$$

где $\Gamma_i = \Gamma_i(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})$, $i = \overline{0,\ n+1}$, F_3 *— постоянная матрица порядка* $(n+1)\times(n+1)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4, где $(\gamma_0\omega+\gamma_1y_1+\ldots+\gamma_{n+1}y_{n+1})^2 = \xi^*(t)\Gamma\xi(t)$, Γ — постоянная матрица порядка $(n+2)\times(n+2)$.

Лемма 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 5, *величина* $\Sigma_0 \neq 0$. *Тогда*

$$I_3 = \int\limits_0^\infty \bigg(\Big(\Gamma_1 - \Gamma_0\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}\Big)y_1^2(t) + \ldots + \Big(\Gamma_{n+1} - \Gamma_0\frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}\Big)y_{n+1}^2(t)\bigg)dt + \\ + \bar{c}_3 \geq 0, \tag{31}$$

$$\bar{c}_3 = \Gamma_0\bar{C}_0 + l_3, \ \ |\bar{c}_3| < \infty. \tag{32}$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 7. Соотношения (31), (32) следуют из формул (29), (30) и формул (22), (23).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия лемм* 1, 2, *матрицы* A, $A_1(\varepsilon)$ *— гурвицевы,* $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любых величин* $\tau_2, \tau_3, \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_{n+1}$ *вдоль решения системы* (10)

$$\begin{aligned} I_4 = \int\limits_0^\infty \bigg(&\tau_2\dot{\sigma}^2(t) + \tau_3\big(\bar{\varphi}(\sigma)\sigma(t) - \mu_0^{-1}\bar{\varphi}^2(\sigma)\big) + \\ &+ \big(\gamma_0\omega(t) + \gamma_1y_1(t) + \ldots + \gamma_{n+1}y_{n+1}(t)\big)^2\bigg)dt = \\ &= \int\limits_0^\infty \big(\mathrm{P}_0\omega^2(t) + \ldots + \mathrm{P}_1y_1^2(t) + \ldots + \mathrm{P}_{n+1}y_{n+1}^2(t)\big)dt + l_4, \end{aligned} \tag{33}$$

$$l_4 = y^*(t)F_4y(t)\Big|_0^\infty = y^*(\infty)F_4y(\infty) - y^*(0)F_4y(0), \ |l_4| < \infty, \tag{34}$$

где $P_i = P_i(\tau_2, \tau_3, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})$, $i = \overline{0, n+1}$, F_4*—постоянная матрица порядка* $(n+1)\times(n+1)$.

Доказательство теоремы следует из представления

$$\tau_2\dot{\sigma}^2(t)+\tau_3\big(\varphi(\sigma(t))\sigma(t)-\mu_0^{-1}\bar{\varphi}^2(\sigma(t))\big)+$$

$$+\big(\gamma_0\omega(t)+\gamma_1 y_1(t)+\ldots+\gamma_{n+1}y_{n+1}(t)\big)^2=\xi^*(t)P\xi(t),\ t\in I,$$

где P — постоянная матрица порядка $(n+2)\times(n+2)$. Далее, применяя леммы 3, 4 с Q=P, получим (33), (34).

Лемма 9. *Пусть выполнены условия теоремы* 6, *величина* $\Sigma_0\neq 0$. *Тогда*

$$I_4=\int\limits_0^\infty\left(\left(P_1-P_0\,\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}\right)y_1^2(t)+\ldots+\left(P_{n+1}-P_0\,\frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}\right)y_{n+1}^2(t)\right)dt+\bar{c}_4,\quad (35)$$

$$\bar{c}_4=P_0\bar{c}_0+l_4,\quad |\bar{c}_4|<\infty. \quad (36)$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 7. Соотношения (35), (36) следуют из (33), (34) и формул (22), (23).

5. Абсолютная устойчивость

На основе результатов, изложенных выше, могут быть сформулированы условия абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

Теорема 7. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *матрицы* $A, A_1(\mu),\ 0<\varepsilon\leq\mu<\mu_0,\ \mu_0\leq\bar{\mu}_0,$ *— гурвицевы,* $\bar{\varphi}(\delta)\in\Phi_1,\ \varepsilon$ *— сколько угодно малое число;*
2. *существует вектор* $\theta^*\in R^{n+1}$ *такой, что* $\theta B_1=0,\ \theta A_1B_1=0,\ldots,\theta A^{n-1}B_1=0,\ \theta A_1^nB\neq 0;$
3. *ранг матрицы* $R=\|\theta^*,\ A_1^*\theta^*,\ldots,A_1^{*n}\theta^*\|$ *равен* $n+1;$
4. *выполнено равенство* $0\leq I_2+I_3=I_1$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty\big((M_0+\Gamma_0-N_0)\omega^2(t)+(M_1+\Gamma_1-N_1)y_1^2(t)+\ldots+$$

$$+(M_{n+1}+\Gamma_{n+1}-N_{n+1})y_{n+1}^2(t)\big)dt=l_1-l_2-l_3,\ |l_1-l_2-l\,_3|<\infty. \quad (37)$$

Доказательство. При выполнении условий 1) – 3) теоремы верны утверждения теорем 3 – 5. Как следует из условия 4) теоремы, выполнено равенство $0 \leq I_2 + I_3 = I_1$. Отсюда с учетом равенств (20), (24), (29) имеем

$$\int\limits_0^\infty \big(M_0\omega^2 + M_1 y_1^2 + \ldots + M_{n+1} y_{n+1}^2\big)dt + l_2 +$$
$$+ \int\limits_0^\infty \big(\Gamma_0\omega^2 + \Gamma_1 y_1^2 + \ldots + \Gamma_{n+1} y_{n+1}^2\big)dt + l_3 =$$
$$= \int\limits_0^\infty \big(N_0\omega^2 + N_1 y_1^2 + \ldots + N_{n+1} y_{n+1}^2\big)dt + l_1.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty \Big((M_0 + \Gamma_0 - N_0)\,\omega^2 + (M_1 - \Gamma_1 - N_1)y_1^2 + \ldots +$$
$$+(M_{n+1} + \Gamma_{n+1} - N_{n+1})y_{n+1}^2\Big)dt = l_1 - l_2 - l_3.$$

Поскольку $|l_1 - l_2 - l_3| \leq |l_1| + |l_2| + |l_3|$, где $|l_1| < \infty$, $|l_2| < \infty$, $|l_3| < \infty$, в силу (19), (25), (30), то $|l_1 - l_2 - l_3| < \infty$. Следовательно верно равенство (37). □

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 7 *и пусть, кроме того,*

$$\begin{gathered}
(M_1 + \Gamma_1 - N_1) - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) > 0,\\
(M_2 + \Gamma_2 - N_2) - \frac{\Sigma_2}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) > 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(M_{n+1} + \Gamma_{n+1} - N_{n+1}) - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) > 0,
\end{gathered} \tag{38}$$

где $\Sigma_0 \neq 0$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2) *абсолютно устойчиво.*

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 6, то верно равенство (37). Как следует из леммы 6 (см. (22), (23)),

$$\int\limits_0^\infty \omega^2 dt = \int\limits_0^\infty \left(-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0} y_1^2 - \ldots - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0} y_{n+1}^2\right) dt + \bar{c}_0, \ \ |\bar{c}_0| < \infty.$$

Теперь равенство (37) запишется в виде

$$\int\limits_0^\infty \Bigg((M_0 + \Gamma_0 - N_0)\Big(-\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0} y_1^2 - \ldots - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0} y_{n+1}^2\Big)\Bigg) dt + (M_0 + \Gamma_0 - N_0)\bar{c}_0 +$$
$$+ \int\limits_0^\infty \big((M_1 + \Gamma_1 - N_1) y_1^2 + \ldots + (M_{n+1} + \Gamma_{n+1} - N_{n+1}) y_{n+1}^2\big)\, dt =$$
$$= l_1 - l_2 - l_3. \tag{39}$$

Тогда (см.(39))

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty \Bigg[\Bigg((M_1 + \Gamma_1 - N_1) - \frac{\Sigma_1}{\Sigma}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) \Bigg) y_1^2 + \ldots + \\ + \Bigg((M_{n+1} + \Gamma_{n+1} - N_{n+1}) - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) \Bigg) y_{n+1}^2 \Bigg] dt = \\ = l_1 - l_2 - l_3 - (M_0 + \Gamma_0 - N_0)\bar{c}_0 = l_5, \end{aligned} \tag{40}$$

$$|l_5| \le |l_1| + |l_2| + |l_3| + |M_0 + \Gamma_0 - N_0|\,|\bar{c}_0| \ < \infty. \tag{41}$$

Далее, применяя лемму 5 к равенству (40) и учитывая оценки (41), получим $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

В самом деле, вектор-функция $y(t) = \big(y_1(t), \ldots, y_{n+1}(t)\big)$ вдоль решения системы (10) непрерывно-дифференцируема и $|y_i(t)| \le m_{i1}$, $|\dot{y}_i(t)| \le m_{i2}$, $i = \overline{1, n+1}$, $t \in I$ (см. теорему 1). Скалярная функция

$$\begin{aligned} lV(x) = \Bigg((M_1 + \Gamma_1 - N_1) - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) \Bigg) x_1^2 + \ldots + \\ + \Bigg((M_{n+1} + \Gamma_{n+1} - N_{n+1}) - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) \Bigg) x_{n+1}^2 > 0 \end{aligned}$$

при любом $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in R^{n+1},\ x \neq 0,\ V(0) = 0$, в силу неравенств (38), $\int\limits_0^\infty V(y(t))dt = l_5 < \infty,\ |l_5| < \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Тогда согласно утверждению леммы 2 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; 0, x_0, \varphi) = 0$, $\forall x_0,\ |x_0| < \infty$, $\forall\, \varphi \in \Phi_0$. Система (10) равносильна системе (1), (2). Из гурвицевости матрицы $A_1(\mu),\ 0 < \varepsilon \le \mu \le \bar{\mu}_0$ следует асимптотическая устойчивость в малом положения равновесия системы (1), (2). □

Теорема 9. *Пусть выполнены условия* 1) –3) *теоремы* 7 *и условия теоремы* 6*, кроме того, выполнено равенство* $I_4 = I_1$. *Тогда*

$$\int\limits_0^\infty \big((P_0 - N_0)\,\omega^2(t) + (P_1 - N_1)y_1^2 + \ldots + (P_{n+1} - N_{n+1})y_{n+1}^2(t)\big)\,dt = \\ = l_1 - l_4, \quad |l_1 - l_4| < \infty. \tag{42}$$

Как и в доказательстве теоремы 7, можно показать, что из равенства $I_4 = I_1$ следует (42), где $|l_1 - l_4| \le |l_1| + |l_4| < \infty$.

Заметим, что несобственный интеграл I_4 при $\tau_3 = \tau_1 > 0$ может быть представлен в виде

$$I_4 = I_2 + I_3 + \int\limits_0^\infty \tau_2 \dot{\sigma}^2(t)dt.$$

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы* 9 *и пусть, кроме того,*

$$P_1 - N_1 - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(P_0 - N_0) > 0, \ldots, P_{n+1} - N_{n+1} - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}(P_0 - N_0) > 0, \tag{43}$$

где $\Sigma_0 \neq 0$. *Тогда положение равновесия системы* (1), (2) *абсолютно устойчиво.*

Доказательство теоремы следует из лемм 5, 6 и равенства (42). Легко убедиться в том, что

$$\int\limits_0^\infty \bigg(\Big((P_1 - N_1) - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(P_0 - N_0)\Big)y_1^2 + \ldots + \\ + \Big((P_{n+1} - N_{n+1}) - \frac{\Sigma_{n+1}}{\Sigma_0}(P_0 - N_0)\Big)y_{n+1}^2\bigg)dt = \\ = l_1 - l_4 - (P_0 - N_0)\,\bar{c}_0 = l_6,\ |l_6| < \infty.$$

Далее, как в доказательстве теоремы 8, получим $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Отсюда и из леммы 2 следует утверждение теоремы. $\square$

Пример. Уравнения движения системы имеют вид (см.(1))

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2,\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + \varphi(\delta),\ \dot{\eta} = \varphi(\delta),\ \delta = -3x_1 + x_2 - 1,5\eta, \quad (44)$$

где $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \bar{\varphi}(\sigma)$, $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. Для данного примера исходные данные возьмем следующими:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ D = (-3,\ 1),\ E = (-1,\ 5),\ n = 2.$$

Производная $\dot{\sigma}(t) = x_2 - 0,5\varphi(\sigma)$.

1. Характеристический полином матрицы A имеет вид $\Delta(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \lambda^2 + \lambda + 1$. Легко проверить, что матрица A — гурвицева.

$$A_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 - 3\varepsilon & -2 + \varepsilon & -1,5\varepsilon \\ -3\varepsilon & \varepsilon & -1,5\varepsilon \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ S = (-3,\ 1,\ -1.5).$$

Функция $z(t)$, $t \in I$, — решение дифференциального уравнения $\dot{z} = A_1(\varepsilon) z + B_1\bar{\varphi}(\sigma), \sigma = Sz$. Характеристический полином матрицы $A_1(\varepsilon)$ равен $\Delta_1(\lambda) = |\lambda I_3 - A_1(\varepsilon)| = \lambda^3 + (1 + 0,5\varepsilon)\lambda^2 + (1 - 0,5\varepsilon)\lambda + 1,5\varepsilon$. Для гурвицевости матрицы $A_1(\varepsilon)$ необходимо и достаточно, чтобы $1,5\varepsilon > 0$, $1 + 0,5\varepsilon > 0$, $(1 - 0,5\varepsilon) > 0$, $(1 + 0,5\varepsilon)(1 - 0,5\varepsilon) - 1,5\varepsilon > 0$.

Отсюда следует, что матрица$A_1(\varepsilon)$ — гурвицева при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Имеем $a_0 = 1,5\varepsilon$, $a_1 = 1 - 0,5\varepsilon$, $a_2 = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Условие $\theta B_1 = 0$ выполняется при $\theta_3 = -\theta_2$. Следовательно, $\theta = (\theta_1, \theta_2, -\theta_2)$. Тогда $\theta A_1 B_1 = -\theta_1 - 2\theta_2 = 0$, $\theta_1 = -2\theta_2$. Искомый вектор при $\theta_2 = 1$ имеет вид $\theta = (-2, 1, -1)$, тогда $\theta A_1^2 B_1 = -1 \neq 0$.

Теперь уравнение (44) запишется в виде

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = y_3, \quad \dot{y}_3 = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - a_3 y_3 - \bar{\varphi}(\sigma), \\ &\sigma = 1,5y_1 - 0,5y_2 + 0,5y_3. \end{aligned} \quad (45)$$

Поскольку $\theta^* = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A_1^*\theta^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_1^{*2}\theta^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то матрица $R = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $|R| = 1$, имеет ранг, равный 3.

Векторы $\theta^*, A_1^*\theta^*, A_1^{*2}\theta^*$ образуют базис в R^3, $S^* = 1,5\theta^* - 0,5A_1^*\theta^* + 0,5A_1^{*2}\theta^*$, $\sigma = 1,5y_1 - 0,5y_2 + 0,5y_3$. Выше были приведены условия лемм 1 и 2.

2. Из (45) следует, что вдоль решения системы (45) верны тождества

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\sigma(t)) &= -\omega\,(t) - y_2\,(t) - y_3(t),\ t \in I = [0, \infty)\,, \\ \sigma(t) &= 1,5y_1(t) - 0,5y_2\,(t) + 0,5y_3\,(t)\,,\ t \in I, \\ \dot{\sigma}\,(t) &= 1,5y_2\,(t) - 0,5y_3\,(t) + 0,5\omega\,(t)\,,\ t \in I, \end{aligned} \tag{46}$$

где $\omega\,(t) = \dot{y}_3\,(t)\,,\ t \in I$. Поскольку $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, то принимается $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. Так как ранг равен 3, то системы (44), (45) равносильны и из $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)) \to 0$ при $t \to \infty$ следует $z(t) = (x_1(t), x_2(t), \eta(t)) \to 0$ при $t \to \infty$.

3. Вычислим несобственные интегралы $I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4$:

а) $I_1 = \int\limits_0^\infty \bar{\varphi}\,(\sigma\,(t))\,\tau\dot{\sigma}\,(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \left(N_0\omega^2\,(t) + N_2y_2^2\,(t) + N_3\sigma y_3^2\,(t)\right) dt + l_1 = \bar{c}_1, |\bar{c}_1| < \infty, |l_1| < \infty$, где $N_0 = -0,5\tau,\ N_1 = 0,\ N_2 = -1,5\tau,\ N_3 = 2,5\tau$, $l_1 = y^*\,(t)\,F_1y\,(t)\,\big|_0^\infty$. Отсюда при τ=1, имеем

$$I_0 = \int\limits_0^\infty \bar{\varphi}\,(\sigma\,(t))\,\dot{\sigma}\,(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \left[\Sigma_0\omega^2\,(t) + \Sigma_2y_2^2\,(t) + \Sigma_3y_3^2\,(t)\right] dt + l_{11} = c_{11},$$

$$l_{11} = y^*\,(t)\ F_0y\,(t)|_0^\infty\,,\ |l_{11}| < \infty,\ |c_{11}| < \infty,$$

где $\Sigma_0 = -0,5$, $\Sigma_1 = 0$, $\Sigma_2 = -1,5$, $\Sigma_3 = 2,5$.

Тогда

$$\int\limits_0^\infty \omega^2\,(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \left[-\frac{\Sigma_2}{\Sigma_0}y_2^2\,(t) - \frac{\Sigma_3}{\Sigma_0}y_3^2\,(t)\right] dt + \bar{c}_0, \tag{47}$$

здесь $-\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_0}=0,\ -\dfrac{\Sigma_2}{\Sigma_0}=-3,\ -\dfrac{\Sigma_3}{\Sigma_0}=5.$

$$\text{б)}\quad 0\le I_2=\int\limits_0^\infty\left[\bar\varphi\left(\sigma\left(t\right)\right)\tau_1\sigma\left(t\right)-\tau_1\mu_0^{-1}\bar\varphi^2\left(\sigma\left(t\right)\right)\right]dt=$$
$$=\int\limits_0^\infty\left[M_0\omega^2\left(t\right)+M_2y_2^2\left(t\right)+M_3y_3^2\left(t\right)\right]dt+l_2= \tag{48}$$
$$=\int\limits_0^\infty\left[\left(M_2-\frac{\Sigma_2}{\Sigma_0}M_0\right)y_2^2\left(t\right)+\left(M_3-\frac{\Sigma_3}{\Sigma_0}M_0\right)y_3^2\left(t\right)\right]dt+\bar c_2,\ \bar c_2=M_0\bar c_0+l_2,$$

где $M_0=-\tau_1\mu_0^{-1},\ M_1=0,\ M_2=2\tau_1-\tau_1\mu_0^{-1},\ M_3=-\tau_1+\tau_1\mu_0^{-1},$
$M_1-M_0\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_0}=0,\ M_2-M_0\dfrac{\Sigma_2}{\Sigma_0}=2\tau_1+2\tau_1\mu_0^{-1},\ M_3-\dfrac{\Sigma_3}{\Sigma_0}M_0=-\tau_1-4\tau_1\mu_0^{-1}.$

$$\begin{aligned}\text{в)}\qquad 0\le I_3&=\int\limits_0^\infty\left[\gamma_0\omega+\gamma_1y_1+\gamma_2y_2+\gamma_3y_3\right]^2dt=\\&=\int\limits_0^\infty\left[\Gamma_0\omega^2+\Gamma_1y_1^2+\Gamma_2y_2^2+\Gamma_3y_3^2\right]dt+l_3=\\&=\int\limits_0^\infty\left[\left(\Gamma_1-\Gamma_0\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}\right)y_1^2(t)+\left(\Gamma_2-\Gamma_0\frac{\Sigma_2}{\Sigma_0}\right)y_2^2(t)+\right.\\&\left.+\left(\Gamma_3-\Gamma_0\frac{\Sigma_3}{\Sigma_0}\right)y_3^2(t)\right]dt+\bar c_3,\ |\bar c_3|<\infty,\ \bar c_3=\Gamma_0\bar c_0+l_3,\end{aligned} \tag{49}$$

где $\Gamma_0=\gamma_0^2, \Gamma_1=\gamma_1^2, \Gamma_2=\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3, \Gamma_3=\gamma_3^2-2\gamma_0\gamma_2, \Gamma_1-\Gamma_0\dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_0}=\Gamma_1=\gamma_1^2,$
$\Gamma_2-\Gamma_0\dfrac{\Sigma_2}{\Sigma_1}=\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3-3\gamma_0^2, \Gamma_3-\Gamma_0\dfrac{\Sigma_3}{\Sigma_0}=\gamma_3^2-2\gamma_0\gamma_2+5\gamma_0^2.$

$$\text{г)}\quad I_4 = \int\limits_0^\infty \Bigg(\tau_2 \dot{\sigma}^2(t) + \tau_3 \left[\bar{\varphi}(\sigma(t))\,\sigma(t) - \mu_0^{-1} \bar{\varphi}^2(\sigma(t)) \right] +$$

$$+ \left[\gamma_0 \omega + \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3 \right]^2 \Bigg) dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left[P_0 \omega^2(t) + P_1 y_1^2(t) + P_2 y_2^2(t) + P_3 y_3^2(t) \right] dt + l_4 =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left[\left(P_1 - P_0 \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0} \right) y_1^2(t) + \left(P_2 - P_0 \frac{\Sigma_2}{\Sigma_0} \right) y_2^2(t) + \left(P_3 - P_0 \frac{\Sigma_3}{\Sigma_0} \right) y_3^2(t) \right] dt +$$

$$+ \bar{c}_4, \quad \bar{c}_4 = P_0 \bar{c}_0 + l_4, \quad |\bar{c}_4| < \infty,$$

где $P_1 - P_0 \dfrac{\Sigma_1}{\Sigma_0} = \gamma_1^2$, $P_2 - P_0 \dfrac{\Sigma_2}{\Sigma_0} = \left(2\tau_3 + 2\tau_3 \mu_0^{-1} \right) + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 - 3\gamma_0^2 + 1,5\tau_2$,
$P_3 - P_0 \dfrac{\Sigma_3}{\Sigma_0} = -\tau_3 - 4\tau_3 \mu_0^{-1} + \gamma_3^2 - 2\gamma_0\gamma_2 + 5\gamma_0^2$.

4. Теперь условия теоремы 8 (см.(38)) запишутся так:

$$\begin{aligned}
&(M_1 + \Gamma_1 - N_1) - \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) = \Gamma_1 = \gamma_1^2 > 0 \\
&(M_2 + \Gamma_2 - N_2) - \frac{\Sigma_2}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) = \\
&= 2\tau_1 + 2\tau_1 \mu_0^{-1} + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 - 3\gamma_0^2 > 0, \\
&(M_3 + \Gamma_3 - N_3) - \frac{\Sigma_3}{\Sigma_0}(M_0 + \Gamma_0 - N_0) = \\
&= -\tau_1 - 4\tau_1 \mu_0^{-1} + \gamma_3^2 - 2\gamma_0\gamma_2 + 5\gamma_0^2 > 0.
\end{aligned} \tag{50}$$

Пусть $d_1 > 0,\ d_2 > 0$ — неизвестные величины. Тогда неравенства (50) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
\gamma_1^2 > 0, \qquad & 2\tau_1 + 2\tau_1 \mu_0^{-1} + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 - 3\gamma_0^2 - d_1 = 0, \\
& -\tau_1 - 4\tau_1 \mu_0^{-1} + \gamma_3^2 - 2\gamma_0\gamma_2 + 5\gamma_0^2 - d_2 = 0.
\end{aligned} \tag{51}$$

Из (51) имеем

$$\tau_1 = \frac{-4\gamma_2^2 + 8\gamma_1\gamma_3 + 2\gamma_0^2 + 4\gamma_0\gamma_2 - 2\gamma_3^2 + 4d_1 + 2d_2}{6}, \tag{52}$$

$$\tau_1\mu_0^{-1} = \frac{2\gamma_3^2 - 4\gamma_0\gamma_2 + 7\gamma_0^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 - 2d_2 - d_1}{6}, \qquad (53)$$

где $\gamma_1^2 > 0, \tau_1 > 0, \tau_1\mu_0^{-1} > 0,\ d_1 > 0, d_2 > 0$. Тогда

$$\bar{\mu}_0 = \frac{-4\gamma_2^2 + 4\gamma_0\gamma_2 - 2\gamma_3^2 + 8\gamma_1\gamma_3 + 2\gamma_0^2 + 4d_1 + 2d_2}{2\gamma_3^2 - 4\gamma_0\gamma_2 + 7\gamma_0^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 - 2d_2 - d_1}. \qquad (54)$$

5. Определим предельное значение $\bar{\mu}_0$ из гурвицевости матрицы$A_1(\mu)$. Характеристическое уравнение матрицы $A_1(\mu)$ имеет вид

$$\Delta_1(\lambda) = |\lambda I_3 - A_1(\mu)| = \lambda^3 + (1 + 0,5\mu)\,\lambda^2 + (1 - 0,5\mu)\,\lambda + 1,5\mu = 0.$$

Предельное значение $\bar{\mu}_0$ определяется из условия $(1 + 0,5\mu)(1 - 0,5\mu) - 1,5\mu > 0$. Отсюда следует, что предельное значение μ равно $\bar{\mu}_0 = \sqrt{13} - 3 = 0,60555127546$. Итак, матрица $A_1(\mu)$ — гурвицева, если $\varepsilon < \mu < \bar{\mu}_0$, $\varepsilon > 0$.

6. Из (52)–(54) при $\gamma_2 = 1/2\,\gamma_0,\ \gamma_3 = 2\,\gamma_1$ получим

$$\tau_1 = \frac{3\gamma_0^2 + 8\gamma_1^2 + 4d_1 + 2d_2}{6}, \quad \mu_0 = \frac{3\gamma_0^2 + 8\gamma_1^2 + 4d_1 + 2d_2}{5,25\gamma_0^2 + 4\gamma_1^2 - 2d_2 - d_1},$$

где $\tau_1 > 0,\ \mu_0 > 0$ при $5,25\gamma_0^2 + 4\gamma_1^2 > 2d_2 + d_1$. Заметим, что решения линейной системы $\dot{x} = Ax + B\mu\sigma,\ \dot{\eta} = \mu\sigma,\ \sigma = Dx + E\eta$ асимптотически устойчивы при $\varepsilon \le \mu < \bar{\mu}_0$. В самом деле, если $z = (x, \eta)$, то $\dot{z} = A_1(\mu)z,\ \sigma = S\,z$, где матрица

$$A_1(\mu) = \begin{pmatrix} A + B\mu D & B\mu E \\ \mu D & \mu E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 - 3\mu & -2 + \mu & -1,5\mu \\ -3\mu & \mu & -1,5\mu \end{pmatrix}$$

— гурвицева при $0 < \varepsilon \le \mu < \bar{\mu}_0$, $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$. Будут ли решения системы (1), (2) абсолютно устойчивы при $\mu_0 = \bar{\mu}_0$? Иными словами, для системы (44) имеет ли положительное решение проблема Айзермана?

7. Для примера (44) проблема Айзермана имеет положительное решение, если существуют числа $\gamma_0, \gamma_1,\ \ d_1 > 0,\ d_2 > 0, \tau_1 > 0$ такие, что

$$\mu_0 = \frac{3\gamma_0^2 + 8\gamma_1^2 + 4d_1 + 2d_2}{5,25\gamma_0^2 + 4\gamma_1^2 - 2d_2 - d_1} = \bar{\mu}_0 = \sqrt{13} - 3.$$

Можно показать, что данное равенство выполняется при $\gamma_0^2 = 32\gamma_1^2$, $d_1 = 0,0217\gamma_1^2 > 0$, $d_2 = 0,016966\gamma_1^2 > 0$, $\tau_1 = 104,120732\gamma_1^2 > 0$.

Таким образом, положение равновесия системы (44) абсолютно устойчиво в $[\varepsilon, \bar{\mu}_0)$, проблема Айзермана для примера (44) имеет положительное решение.

6. Заключение

В работе получены следующие основные результаты: уравнения движения системы с помощью неособых преобразований сведены к специальному виду; получены эквивалентные тождества вдоль решений системы относительно переменных нелинейности в системе; сделана оценка решения нелинейной системы; изучены асимптотические свойства функций, связанных с ограниченностью несобственного интеграла; получено новое представление квадратичной формы относительно фазовых переменных в виде суммы двух слагаемых (первое слагаемое является квадратичной формой, приведенной к диагональному виду, а второе слагаемое – полным дифференциалом функции по времени); на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы доказаны теоремы об абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы.

Предлагаемый метод исследования абсолютной устойчивости решения уравнений с дифференциальным включением позволяет получить более широкую область абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы, нежели известные критерии.

Литература

1 Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. — М.: АН СССР, 1963. — 240 с.

2 Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. — М.: Гостехиздат, 1951. — 216 с.

3 Попов В.П. Гиперустойчивость автоматических систем. — М.: Наука, 1970. — 453 с.

4 Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

5 Бедельбаев А.К. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования. — Алма-Ата: АН КазССР, 1960. — 164 с.

6 Майгарин Б.Ж. Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. — Алма-Ата: Наука КазССР, 1980. — 316 с.

7 Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1969. — №5. — С. 38–48.

8 Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости системы управления с несколькими нелинейными элементами // АН СССР. Автоматика и телемеханика. — 1970. – № 12. — С. 83–94.

9 Айзерман М.А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости в "большом" динамических систем // УМН. — 1949. — Т.4, № 4. — С. 186–188.

10 Kalman R.E. Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Transactions of ASME. — 1957. — V.79, № 3. — P. 553–556.

11 Брагин В.О., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи ЧУА // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2011. — № 4. — С. 3–36.

12 Айсагалиев С.А. К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Дифференциальные уравнения. — Минск-Москва. — 1994. — Т.30, № 5. — С. 748–757.

13 Айсагалиев С.С. Теория регулируемых систем. — Алматы: Қазақ университетi, 2000. — 234 с.

14 Айсагалиев С.А. Теория устойчивости динамических систем. — Алматы: Қазақ университетi, 2012. — 216 с.

15 Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N. Certain problems of synchronization theory // Journal Inverse Ill-Posed Problems. — 2013. — № 21. — P. 159–175.

Literatura

1 Aizerman M.A., Gantmaher F.R. Absolyutnaya ustoichivost' reguliruemyh sistem. — M.: AN SSSR, 1963. — 240 s.

2 Lur'e A.I. Nekotorye nelineinye zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniya. — M.: Gostehizdat, 1951. — 216 s.

3 Popov V.P. Giperustoichivost' avtomaticheskih sistem. — M.: Nauka, 1970. — 453 s.

4 Gelig A.H., Leonov G.A., Yakubovich V.A. Ustoichivost' nelineinyh sistem s needinstvennym sostoyaniem ravnovesiya. — M.: Nauka, 1978. — 400s.

5 Bedel'baev A.K. Ustoichivost' nelineinyh sistem avtomaticheskogo regulirovaniya. — Alma-Ata: AN KazSSR, 1960. — 164 s.

6 Maigarin B.Zh. Ustoichivost' i kachestvo processov nelineinyh sistem avtomaticheskogo upravleniya. — Alma-Ata: Nauka KazSSR, 1980. — 316 s.

7 Aisagaliev S.A. Ob opredelenii oblasti absolyutnoi ustoichivosti vynuzhdennyh dvizheniy v nelineinyh sistemah // Izv. AN SSSR. Tehnicheskaya kibernetika. — 1969. — №5. — S. 38–48.

8 Aisagaliev S.A. Ob opredelenii oblasti absolyutnoi ustoichivosti sistemy upravleniya s neskol'kimi nelineinymi elementami // AN SSSR. Avtomatika i telemekhanika. — 1970. – № 12. — S. 83–94.

9 Aizerman M.A. Ob odnoi probleme, kasayushheisya ustoichivosti v "bol'shom" dinamicheskih sistem // UMN. — 1949. — T.4, № 4. — S. 186–188.

10 Kalman R.E. Physical and mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Transactions of ASME. — 1957. — V.79, № 3. — P. 553–556.

11 Bragin V.O., Vagaitcev V.I., Kuznetcov N.V., Leonov G.A. Algoritmy poiska skrytyh kolebaniy v nelineinyh sistemah. Problemy Aizermana, Kalmana i tcepi ChUA // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. — 2011. — № 4. — S. 3–36.

12 Aisagaliev S.A. K teorii absolyutnoi ustoichivosti reguliruemyh sistem // Differentcial'nye uravneniya. — Minsk-Moskva. — 1994. — T.30, № 5. — S. 748–757.

13 Aisagaliev S.S. Teoriya reguliruemyh sistem. — Almaty: Kazakh universiteti, 2000. — 234 s.

14 Aisagaliev S.A. Teoriya ustoichivosti dinamicheskih sistem. — Almaty: Kazakh universiteti, 2012. — 216 s.

15 Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N. Certain problems of synchronization theory // Journal Inverse Ill-Posed Problems. — 2013. — № 21. — P. 159–175.

Статья поступила в редакцию 19.02.2014 г.

Әбенов Б.Қ., Айсағалиев С.Ә., Қалимолдаев М.Н. ҚАРАПАЙЫМ ЕРЕКШЕ ЖАҒДАЙДАҒЫ РЕТТЕЛЕТІН ЖҮЙЕЛЕРДІҢ АБСОЛЮТТІК ОРНЫҚТЫЛЫҒЫНА

Жүйенің шешімдері бойымен меншікті емес интегралдарды бағалау жолымен қарапайым ерекше жағдайдағы сызықтық емес реттелетін жүйелердің тепе-теңдік күйінің абсолюттік орнықтылығының жаңа тиімді шарты алынған. Абсолюттік орнықтылықты зерттеудің ұсынылған әдісі конструкциялық параметрлер кеңістігінде белгілі әдістерге қарағанда кеңірек абсолюттік орнықтылық аймағын алуға мүмкіндік береді. Ұсынылған әдістің тиімділігі мысал арқылы көрсетілген.

Abenov B.K., Aisagaliev S.A., Kalimoldaev M.N. TO ABSOLUTE STABILITY OF REGULAR SYSTEMS IN THE SIMPLE CRITICAL CASE

A new effective condition of absolute stability of the equilibrium of nonlinear regulative systems in the simple critical case is obtained by evaluating of improper integrals along solution of the system. The proposed research method of the absolute stability allows to obtain domain of absolute stability in the space of constructive parameters of system wider, than the known methods. Efficiency of suggested method is demonstrated by an example.